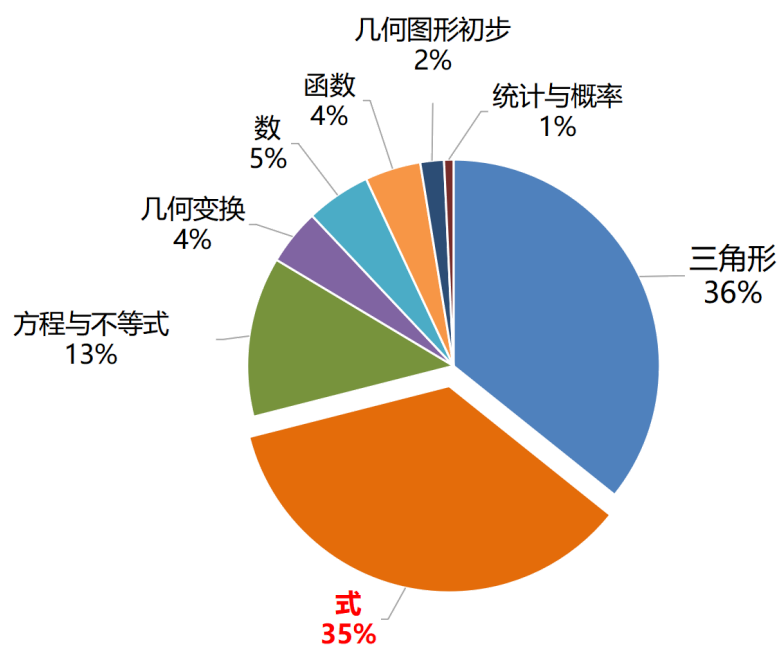


分式的运算

知己知彼



一、分式的乘除

分式的乘除

分式乘法法则：分式乘分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母。用式子表示为：_____。

分式除法法则：分式乘除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘。用式子表示为：_____。

分式乘方法则：分式的乘方就是把分子、分母分别乘方。用式子表示为：_____。

【教法备注】

1、分式乘法法则：分式乘分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母。

用式子表示为： $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ 。

2、分式除法法则：分式乘除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘。

用式子表示为： $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ 。

分式的乘除法与分数的乘除法类似，分式的乘除法都能统一成乘法，遇除化乘。

3、分式乘方法则：分式的乘方就是把分子、分母分别乘方。

用式子表示为： $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ ，其中 n 是正整数。

$$(\frac{2a^2b}{-c^3d^2})^3 = \frac{(2a^2b)^3}{(-c^3d^2)^3} = -\frac{8a^6b^3}{c^9d^6}。$$

书写分式的乘方时，一定要把分式加上括号。在计算同时含有分式乘方、乘除运算，应先算乘方，再算乘除，有多项式时应先分解因式，再计算。

例题

【知识点拨】

分式与分式相乘除，若分子、分母是多项式，通常先分解因式，便于约分。分式与整式相乘除时，要把整式看作分母为1的式子，然后按分式乘除法法则计算。分式的分子或分母的系数为负数时，一般把负号提到分式的前面。分式的乘除法运算的结果能约分的要约分，最终结果化为最简公式或整式。要注意运算顺序，同级运算应按从左至右的顺序进行计算。分式乘方，必须是分子、分母整体各自乘方，乘方时系数不要漏掉乘方。分式乘方时，确定乘方结果的符号的方法与有理数乘方相同，即正分式的任何次幂都为正；负分式的偶次幂为正，奇次幂为负。

1. 计算： $\frac{4a+4b}{5ab} \cdot \frac{15a^2b}{a^2-b^2}$.

【答案】 $\frac{12a}{a-b}$.

【解析】 原式 = $\frac{4(a+b)}{5ab} \cdot \frac{15a^2b}{(a+b)(a-b)} = \frac{12a}{a-b}$.

【标注】【知识点】分式乘除混合运算

【重点强调】

2015~2016学年天津和平区初二上学期期末第21.3题4分

2. 化简 $\frac{1}{a-2} \div \frac{a}{a^2-4}$ 的结果是 ().

A. $\frac{a+2}{a}$

B. $\frac{a}{a+2}$

C. $\frac{a-2}{a}$

D. $\frac{a}{a-2}$

【答案】 A

【解析】 原式 = $\frac{1}{a-2} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{a}$,
 $= \frac{a+2}{a}$,

故选：A.

【标注】【知识点】分式加减、乘除、乘方混合运算

【重点强调】

2016~2017学年天津红桥区初二上学期期末第5题3分

3. 计算： $\frac{a-1}{a^2-4a+4} \div \frac{a^2-1}{a^2-4}$.

【答案】 $\frac{a+2}{(a-2)(a+1)}.$

【解析】 原式 = $\frac{a-1}{(a-2)^2} \times \frac{(a+2)(a-2)}{(a+1)(a-1)}$
 $= \frac{a+2}{(a-2)(a+1)}$
 $= \frac{a+2}{a^2-a-2}.$

【标注】【知识点】分式乘除混合运算

【重点强调】

2016~2017学年天津西青区初二上学期期末模拟第20.1题

4. 计算： $\left(\frac{a^2b}{-cd^3}\right)^3 \div \frac{2a}{d^3} \cdot \left(\frac{c}{2a}\right)^2.$

【答案】 $-\frac{a^3b^3}{8cd^6}.$

【解析】 原式 = $-\frac{a^6b^3}{c^3d^9} \cdot \frac{d^3}{2a} \cdot \frac{c^2}{4a^2} = -\frac{a^3b^3}{8cd^6}$

【标注】【知识点】分式乘除混合运算

5. 计算： $(xy-x^2) \div \frac{x^2-2xy+y^2}{xy} \cdot \frac{x-y}{x^2}.$

【答案】 $-y$.

【解析】 $(xy - x^2) \div \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} \times \frac{x - y}{x^2}$
 $= x(y - x) \div \frac{(x - y)^2}{xy} \times \frac{x - y}{x^2}$
 $= -x(x - y) \times \frac{xy}{(x - y)^2} \times \frac{x - y}{x^2}$
 $= -y$.

【标注】 【知识点】 分式加减、乘除、乘方混合运算

练习

6. 计算： $\frac{x}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x + y$

【解析】 原式 $= \frac{x}{x - y} \times \frac{(x + y)(x - y)}{x}$
 $= x + y$.

【标注】 【知识点】 分式乘法运算

7. 化简 $\frac{x^2 - 1}{x} \div \frac{x + 1}{x}$ 的结果 () .

A. $x - 1$

B. x

C. $\frac{1}{x}$

D. $\frac{1}{x - 1}$

【答案】 A

【解析】 原式 $= \frac{(x + 1)(x - 1)}{x} \cdot \frac{x}{x + 1}$
 $= x - 1$.
故选A .

【标注】 【知识点】 分式乘除混合运算

【重点强调】

2016年天津南开区初三一模第8题

8.

计算： $\frac{x^2+x-6}{x-3} \div \frac{x+3}{x^2-x-6}$.

【答案】 $x^2 - 4$.

【标注】 【知识点】 分式乘除混合运算

9. 计算： $\left(\frac{a-b}{ab}\right)^2 \cdot \left(\frac{-a}{b-a}\right)^3 \cdot (a^2-b^2)$.

【答案】 $\frac{a^2+ab}{b^2}$.

【解析】 原式 = $\frac{(a-b)^2}{a^2b^2} \cdot \frac{a^3}{(a-b)^3} \cdot (a-b)(a+b)$
 $= \frac{a(a+b)}{b^2}$.

【标注】 【知识点】 分式乘除、乘方混合运算

10. 计算： $\frac{x-y}{x^2+xy} \div \frac{xy-x^2}{x^2y^2-x^4} \cdot \frac{1}{x-y}$.

【答案】1.

【标注】【知识点】分式乘除混合运算

二、分式的加减

分式的加减

同分母分式相加减，分母不变，把分子相加减；
用分子表示为：_____.

异分母分式相加减，先通分，变为同分母的分式，再加减。
用式子表示为：_____.

【教法备注】

分式的加减法则：

(1) 同分母分式相加减，分母不变，把分子相加减；

用分子表示为： $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$.

(2) 异分母分式相加减，先通分，变为同分母的分式，再加减。

用式子表示为： $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.

|| 例题

【知识点拨】

“把分子相加减”是把各个分子的整体相加减，即各个分子应先加上括号再加减，分子是单项式时括号可以省略。

若加减运算中含有整式，应视其分母为“1”的分式先通分，再进行加减运算。

$$\begin{aligned} \text{如：} \frac{1}{x+1} + x - 1 &= \frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{1} = \frac{1}{x+1} + \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{1 + (x^2 - 1)}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}. \end{aligned}$$

当分子的次数高于或等于分母的次数时，有时可将其分离为整式与真分式之和参与运算，可使运算简便，如：

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + 2}{x+1} = x + 1 + \frac{2}{x+1}.$$

分式的加减运算结果必须化为最简分式或整式，运算中要适当约分。

11. 化简 $\frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}$ 的结果是 ().

A. $a + b$ B. a C. $a - b$ D. b **【答案】** A**【解析】** 原式 $= \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b} = a + b$.**【标注】** 【知识点】分式约分**【重点强调】**

2017年天津红桥区初三三模第7题3分

12. 化简 $\frac{a^2}{a-1} - \frac{1-2a}{1-a}$ 的结果为 ().A. $\frac{a+1}{a-1}$ B. $a - 1$ C. a

D. 1

【答案】 B**【解析】** 原式 $= \frac{a^2}{a-1} + \frac{1-2a}{a-1}$
 $= \frac{(a-1)^2}{a-1}$
 $= a - 1$.**【标注】** 【知识点】分式减法运算**【重点强调】**

2020年天津西青区初三二模第7题3分

13. 计算 $\frac{3x}{(x-1)^2} - \frac{3}{(1-x)^2}$ 的结果为 ().

A. 3

B. -3

C. $\frac{3}{1-x}$ D. $\frac{3}{x-1}$ **【答案】** D**【解析】** $\frac{3x}{(x-1)^2} - \frac{3}{(1-x)^2} = \frac{3x-3}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1}$.**【标注】** 【知识点】分式加减、乘除、乘方混合运算**【重点强调】**

2018年天津河西区天津市培杰中学初三一模第7题3分

14. 计算： $\frac{1}{x-5} - \frac{6}{x^2-25} - \frac{x+1}{10+2x}$.

【答案】 $\frac{-x^2+6x+3}{2x^2-50}$.

【解析】 略

【标注】 【知识点】 分式加减、乘除、乘方混合运算

15. 化简 $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} - \frac{y}{x-y}$ 的结果是 () .

A. $\frac{x}{x-y}$

B. $\frac{y}{x+y}$

C. $\frac{x}{x+y}$

D. $\frac{y}{x-y}$

【答案】 A

【解析】
$$\begin{aligned} & \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} - \frac{y}{x-y} \\ &= \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} - \frac{y}{x-y} \\ &= \frac{x+y}{x-y} - \frac{y}{x-y} \\ &= \frac{x+y-y}{x-y} \\ &= \frac{x}{x-y} . \end{aligned}$$

故选：A .

【标注】 【知识点】 分式加减、乘除、乘方混合运算

【重点强调】

2020年天津南开区初三二模第7题3分

|| 练习

16. 计算 $\frac{2x+3}{x+1} - \frac{2x}{x+1}$ 的结果为 () .

A. 1

B. 3

C. $\frac{3}{x+1}$ D. $\frac{x+3}{x+1}$ **【答案】** C

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \quad & \frac{2x+3}{x+1} - \frac{2x}{x+1} \\ &= \frac{2x+3-2x}{x+1} \\ &= \frac{3}{x+1}. \end{aligned}$$

故选：C.

【标注】【知识点】分式通分**【重点强调】**

2018年天津中考真题第7题3分

17. 化简 $\frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{1-x}$ 的结果是 ().A. $x+1$ B. $\frac{1}{x+1}$ C. $x-1$ D. $\frac{x}{x-1}$ **【答案】** A

$$\text{【解析】} \quad \text{原式} = \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1.$$

【标注】【知识点】分式加法运算**【重点强调】**

2015~2016学年6月天津南开区初三下学期月考三模第5题4分

18. 计算 $\frac{a}{a^2-b^2} - \frac{1}{a-b}$ 的结果为 ().A. b B. $-b$ C. $\frac{b}{a-b}$ D. $-\frac{b}{a^2-b^2}$ **【答案】** D

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \quad \text{原式} &= \frac{a-(a+b)}{(a+b)(a-b)}, \\ &= \frac{-b}{a^2-b^2}. \end{aligned}$$

故选D.

【标注】【知识点】分式加减、乘除、乘方混合运算

【重点强调】

2019年天津津南区初三一模第7题3分

19. 化简 $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x^2-4}$ 的结果是 () .

A. $\frac{1}{x+2}$

B. $\frac{x+4}{x^2-4}$

C. $x+2$

D. $x+4$

【答案】 B

【解析】

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x^2-4} \\ &= \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-4} \\ &= \frac{x+4}{x^2-4} . \end{aligned}$$

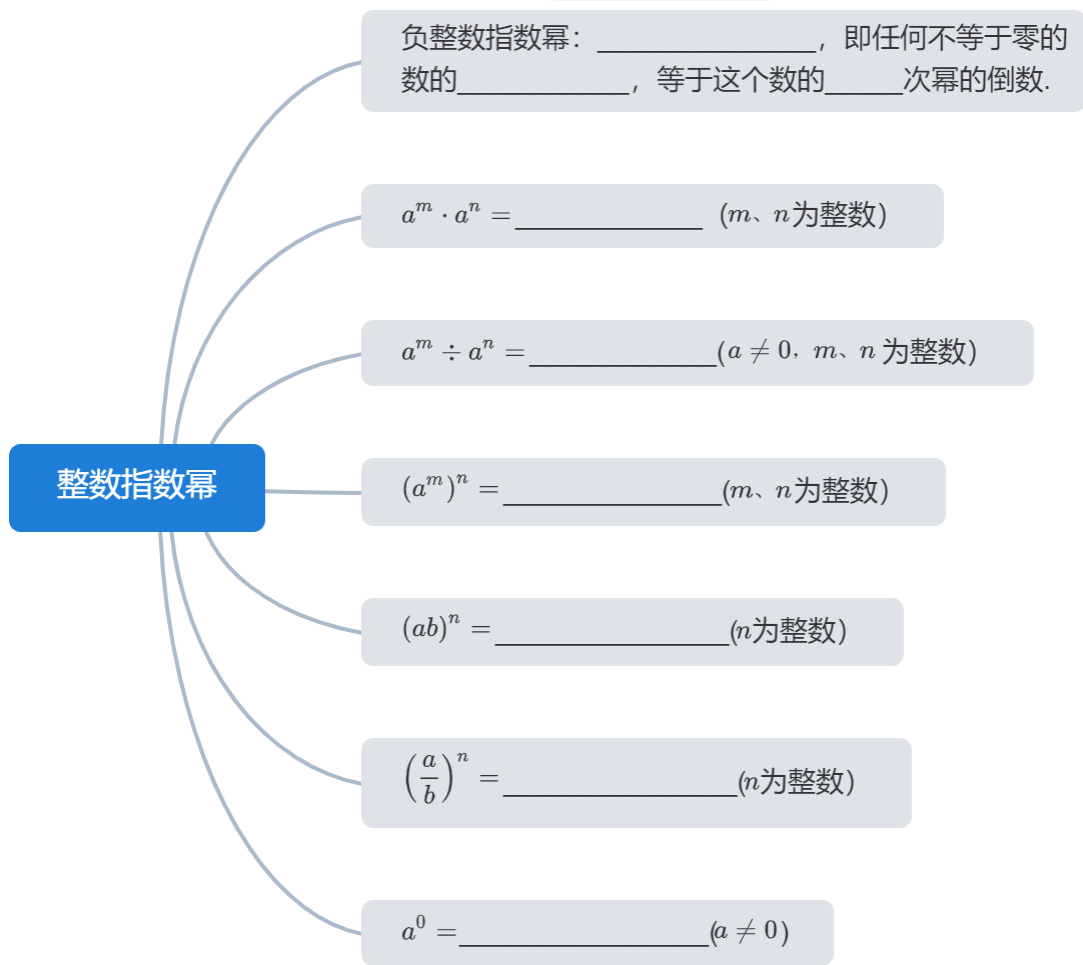
故选B .

【标注】【知识点】分式加法运算

【重点强调】

2020年天津河西区初三毕业考试第6题3分

三、 整数指数幂



【教法备注】

1、负整数指数幂： $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($n \neq 0, n$ 为正整数)，即任何不等于零的数的 $-n$ (n 为正整数) 次幂，等于这个数的 n 次幂的倒数。

例：

同底数幂的除法： $3^2 \div 3^5 = 3^{2-5} = 3^{-3}$

除法的意义： $3^2 \div 3^5 = \frac{3^2}{3^5} = \frac{1}{3^3}$

规定： $3^{-3} = \frac{1}{3^3}$

2、引入负整数指数幂后，指数的取值范围就推广到全体整数。一般地，当 n 是正整数时，

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$)。也就是说， a^{-n} ($a \neq 0$) 是 a^n 的倒数。

整数指数幂的运算性质为：

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (m, n 为整数)；

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 为整数)；

(3) $(ab)^n = a^n b^n$ (n 为整数)；

(4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0, m, n$ 为整数)；

$$(5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (n \text{ 是整数}) .$$

$$(6) a^0 = 1 \quad (a \neq 0) .$$

|| 例题

【知识点拨】

因为零不能作为除数，所以 $a \neq 0$ 是 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 的先决条件．整数指数幂的运算结果一般要用正整数指数幂来表示，即幂指数为负整数时，最后的计算结果要把幂指数化为正整数．

如计算结果得到 $2^{-2}a^4b^{-3}c^2$ 后，还需化为 $\frac{a^4c^2}{4b^3}$ ．

20. 计算： $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}} .$

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】 $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} .$
故答案为： $\frac{9}{4} .$

【标注】【知识点】负整数指数幂

21. 计算： $\left(\frac{-2a^2b}{3c}\right)^{-2} .$

【答案】 $\frac{9c^2}{4a^4b^2} .$

【解析】 $\left(\frac{-2a^2b}{3c}\right)^{-2}$

$$= \frac{1}{\left(\frac{-2a^2b}{3c}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{4a^4b^2}{9c^2}}$$

$$= \frac{9c^2}{4a^4b^2} .$$

【标注】【知识点】负整数指数幂

22. 负指数幂运算：

$$\left(\frac{2a^2}{b}\right)^2 \cdot (2a^2b^{-2})^{-2}.$$

【答案】 b^2 .

【解析】原式 $= \frac{4a^4}{b^2} \cdot \frac{b^4}{4a^4} = b^2$.

【标注】【知识点】负整数指数幂

练习

23. 计算 $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ 的值为 () .

A. 9

B. -9

C. $\frac{1}{9}$

D. $-\frac{1}{9}$

【答案】A

【解析】 $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$ ，故选A.

【标注】【知识点】负整数指数幂

24. 计算： $\left(\frac{3z}{-2x^4y^2}\right)^{-3}$.

【答案】 $-\frac{8x^{12}y^6}{27x^3}$.

【解析】 $\left(\frac{3z}{-2x^4y^2}\right)^{-3}$
 $= -\frac{1}{\left(\frac{3z}{-2x^4y^2}\right)^3}$
 $= -\frac{1}{\frac{27z^3}{8x^{12}y^6}}$
 $= -\frac{8x^{12}y^6}{27z^3}$.

【标注】【知识点】负整数指数幂

25. 计算： $(3x)^{-3} \div (x^{-2}y^{-1}) =$ _____ .

【答案】 $\frac{y}{27x}$

【解析】 $(3x)^{-3} \div (x^{-2}y^{-1})$
 $= \frac{1}{27x^3} \cdot x^2y$
 $= \frac{y}{27x}$.

【标注】【知识点】负整数指数幂

 我学会了什么